

$$\chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $\chi = \frac{\rho c}{\lambda}$  — коэффициент температуропроводности;

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  
 $\rho$  — плотность;  
 $c$  — удельная теплоемкость.

Уравнение решалось методом Галеркина для вариационных задач [4, с. 716; 5 с. 603—605]. Согласно этому методу корректная постановка задачи в данном случае возможна при наличии двух граничных и одного начального условий. Для их определения использовалась схема, приведенная на рис. 1.

Здесь необходимо сделать некоторые допущения, которые облегчат решение поставленной задачи. Из анализа процесса нагрева металла в индукторе можно сделать вывод, что температурное поле вдоль осей  $y$  и  $z$  практически стационарно (краевыми эффектами на торцах подложки можно пренебречь), кроме того, в данном случае  $l \gg r$ .

На основании принятых допущений можно записать:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

В такой постановке задача сводится к плоской и совместно с граничными и начальными условиями записывается следующим образом:

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (11)$$

$$T(r, t) = T_l(t); \quad (12)$$

$$g(0, t) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (13)$$

$$T(x, 0) = T_l(0). \quad (14)$$

Здесь  $g(0, t)$  — тепловой поток через сечение, проходящее по оси 0.

Начальное условие (14) задает температуру по сечению загрузки в начальный момент времени. Уравнение (11) с граничными условиями (12) и (13) и начальным условием (14) представляет собой корректную постановку задачи. Для дальнейшего решения уравнения (11) заменим точные значения функций на приближенные, т. е. применим аппроксимацию.

Выберем для температуры  $T$  следующую аппроксимацию общего вида:

$$T \approx \hat{T} = \sum_{k=1}^N T_k(t) \cdot q_k(x), \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где  $q_k$  — базисные функции.

Подстановка аппроксимации (15) в уравнение (11) приводит к невязке ( $\sigma$ ):

$$\rho \cdot c \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} = \sigma. \quad (16)$$

$$\int_0^R \sigma \cdot q_k(r) dx \xrightarrow{k=1, 2, \dots, \infty} 0. \quad (17)$$

Выражение (17) представляет собой систему  $N$  уравнений и является при  $N=\infty$  условием  $\sigma=0$ , а при конечном  $N$  — условием минимальности  $\sigma$ .

Для вариации температуры запишем:

$$\delta \hat{T} = \sum_{k=1}^N \delta T_k q_k(x). \quad (18)$$

Проварьируем уравнение (16) с учетом (17) и (18):

$$\int_0^r \left[ \frac{\partial}{\partial t} \delta T - \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta T \right] dx = 0. \quad (19)$$

Преобразуем выражение (19), принимая во внимание граничное условие (13) и то, что формально при  $x=r$   $\delta T=0$ . Окончательно получим следующую вариационную формулировку задачи:

$$\int_0^r \left[ \frac{\partial}{\partial t} \delta T + \chi \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial x} \right] dx = 0. \quad (20)$$

#### Определение аппроксимирующих соотношений

При использовании для аппроксимации кусочно-линейных базисных функций (15)  $q_k$  являются полиномами Лагранжа, а коэффициенты аппроксимации  $T_k$  имеют смысл узловых значений функции.

Для производных и вариаций автоматически получим (аргументы  $t$  и  $x$  опустим для краткости):

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \sum_{k=1}^2 \dot{T}_k^i \cdot q_k^i; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 T_k^i \cdot q_k^i; \quad (21)$$

$$\delta \hat{T} = \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \cdot q_k^i; \quad \frac{\partial \delta \hat{T}}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \cdot q_k^i, \quad (22)$$

где  $\dot{T}_k^i$  — производная температуры по времени;  
 $q_k^i$  — производная полинома по координате  $x$ .

Для удобства дальнейших вычислений перейдем к нормированной местной координате  $\xi$  при помощи соотношения:

$$\xi = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}. \quad (23)$$

Применив аппроксимации (21) и (22), найдем аппроксимированный вклад элемента  $i$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \sum_{j=1}^2 \dot{T}_j^i h_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} q_k^i q_j^i d\xi + \\ & + \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \sum_{j=1}^2 T_j^i \frac{\chi}{h_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} q_k^i q_j^i d\xi = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В матричной форме последнее выражение имеет следующий вид:

$$[\delta T^i]^T \cdot \mathbf{a}^i \cdot \dot{T}^i + [\delta T^i]^T \cdot \mathbf{c}^i \cdot T^i = 0, \quad (25)$$

где  $\mathbf{a}^i, \mathbf{c}^i$  — матрицы размерами  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{a}^i = [a_{kj}^i] = h_i \begin{bmatrix} \int_0^1 q_1^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_1^i q_2^i d\xi \\ \int_0^1 q_2^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_2^i q_2^i d\xi \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}^i = [c_{kj}^i] = \frac{\chi}{h_i} \begin{bmatrix} \int_0^1 q_1^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_1^i q_2^i d\xi \\ \int_0^1 q_2^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_2^i q_2^i d\xi \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Суммируя вклады, получаем аппроксимацию исходного уравнения (24) в виде

$$[\delta T]^i \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{T} + [\delta T]^T \cdot \mathbf{C} \cdot T = 0, \quad (27)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  — глобальные матрицы коэффициентов.

Для получения глобальных матриц коэффициентов необходимо произвести ансамблирование вкладов элементов матриц  $\mathbf{a}^i$  и  $\mathbf{c}^i$ .

Из (27) следует:

$$[\delta T]^T (\mathbf{A} \dot{T} + \mathbf{C} T) = 0, \quad (28)$$

или, в силу произвольности и независимости компонентов  $[\delta T]^T$ :

$$\mathbf{A} \dot{T} + \mathbf{C} T = 0. \quad (29)$$

Выражение (29) определяет систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и может быть решена любым из существующих способов. Для того, чтобы учесть граничное условие (12), необходимо исключить первое уравнение из системы (29) и перенести в правую часть первые столбцы матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  как известные. В итоге получим:

$$\mathbf{A} \dot{T} + \mathbf{C} T = \mathbf{D}, \quad (30)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{a}_{il}^i] \cdot f'(t) + [\mathbf{c}_{il}^i] \cdot f(t), \quad (31)$$

где  $f(t), f'(t)$  — функция температуры от времени на поверхности металлического резонатора и ее производная, соответственно.

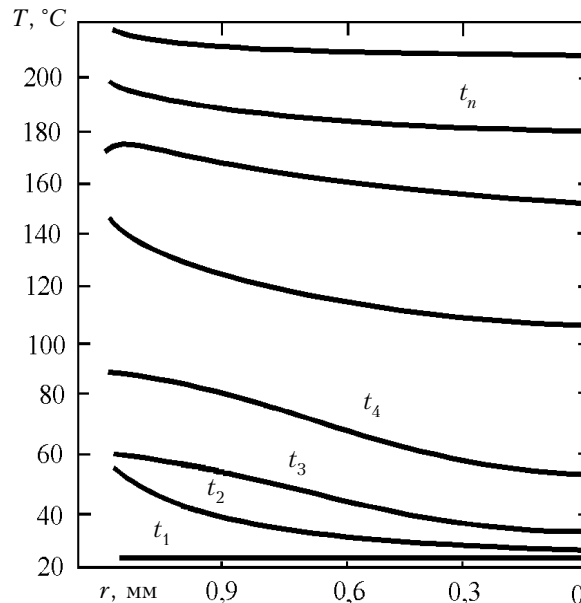


Рис. 3. Распределение температуры по оси  $x$  на различных временных слоях

На рис. 3 показаны результаты моделирования теплового поля в загрузке, выполненные с помощью математического пакета MATLAB. Приведенные графики соответствуют реальной физической картине нагрева и отражают распределение температуры в различные моменты времени  $t$ .

Описанный метод моделирования индукционного нагрева СПП позволяет связать параметры и режимы работы источника высокочастотного напряжения с физическими характеристиками процесса нагрева: распределением температуры и длительностью.

#### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Автоматическое управление электротермическими установками / А. М. Кручинин, К. М. Махмудов, Ю. М. Миронов и др. — М. : Энергоатомиздат, 1990.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М. : Наука, 1989.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. шк. 1983.
4. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. — М. : Наука, 1984.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: Кн. 1. — М. : Физматгиз, 1962.